

LES SEQÜÈNCIES DE FAREY.

Si us dono una llista de decimals, pot resultar bastant senzill ordenar-los. Però, què passa amb les fraccions?

Un home anomenat John Farey va investigar com ordenar les seqüències de fraccions. A aquestes seqüències se les anomena seqüències de Farey.

La tercera seqüència de Farey, F3, es veu així:

$$0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1$$

En ella s'hi ordenen totes les fraccions entre 0 i 1, en les seves formes més simples, amb denominadors que no siguin més grans que 3.

Aquí hi teniu F4:

$$0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1$$

a) Escriviu F5

b) Quines són les fraccions de F5 que no estan a F6?

c) Useu la F5 per completar F6 i F7.

Aquí hi ha algunes altres preguntes a considerar:

d) Hi ha un munt de fraccions a F11 que no estan a F10. Només hi ha unes poques fraccions a F12, que no apareixen a F11. Pots explicar per què és així?

e) En quins casos creus que necessitaràs un bon grapat de fraccions extra per aconseguir la propera seqüència de Farey?

f) Sempre passarà que una seqüència de Farey és més llarga que l'anterior? Com ho saps?

Fins ara, totes les seqüències de Farey que hem vist tenen un nombre senar de fraccions. Pots trobar una seqüència de Farey amb un nombre parell de fraccions?

g) En F4, $\frac{3}{4}$ es troba entre $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{1}$. Quan introduïm una nova fracció, què observes sobre les fraccions que aquesta té a cada costat?

h) Tria tres fraccions consecutives d'una seqüència qualsevol de Farey. Pots trobar una manera de combinar les dues fraccions exteriors per trobar la del mig?

Nosaltres hem optat per a fer una taula. Com que a l'exercici es parla fins a F12, hem fet una taula amb totes les fraccions amb numerador de 0 a 12 i amb denominadors de 0 a 12:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{7}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{12}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{1}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$
$\frac{11}{1}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{11}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{12}{1}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{12}{12}$

Després de fer la taula, hem decidit aplicar-hi algun color, per a que sigui més visual. Pintem de color vermell $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, i $\frac{1}{1}$, que són els límits de la seqüència de Farey i el nombre del mig. Els pintem de vermell per a tenir una referència.

Després, pintem de gris la diagonal on totes les fraccions són igual a 1, és a dir: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$... Aquestes fraccions, estan repetides, són iguals que $\frac{1}{1}$, per tant les podem eliminar de la taula. També pintem de gris les fraccions que són igual a zero, ja que amb el $\frac{0}{1}$, ja en tenim prou. A més a més, observem que totes les fraccions que queden per sota de la diagonal que dóna 1, representen nombres que són més grans que la unitat. Els pintem de gris també, i així en prescindim, ja que les seqüències de Farey, tenen el límit a la unitat, i aquests nombres són més grans. Ens queda això:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{7}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{12}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{1}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$
$\frac{11}{1}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{11}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{12}{1}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{12}{12}$

Ara anem a treballar amb les fraccions dels requadres blancs. Mirem cadascuna de les files amb atenció, i el que farem serà pintar de gris els requadres on hi hagi una fracció que es pugui reduir. Les fraccions equivalents, són una repetició de qualsevol altra fracció equivalent del quadre, per tant, també les eliminarem. Hi hem trobat aquestes:

- Fila 1: ja està tota anul·lada.
- Fila 2: No anul·lem res, perquè cap fracció es pot reduir
- Fila 3: Eliminem $2/4$ perquè és igual a $1/2$. I així, seguim: $2/6 = 1/3$
 $2/8 = 1/4$ $2/10 = 1/5$ i $2/12 = 1/6$
- Fila 4: $3/6 = 1/2$ $3/9 = 1/3$ $3/12 = 1/4$
- Fila 5: $4/6 = 2/3$ $4/8 = 1/2$ $4/10 = 2/5$ $4/12 = 1/3$
- Fila 6: $5/10 = 1/2$
- Fila 7: $6/8 = 3/4$ $6/9 = 2/3$ $6/10 = 3/5$ $6/12 = 1/2$
- Fila 8: Com no hi ha ni múltiples ni divisors de 7, no es pot simplificar res.
- Fila 9: $8/10 = 4/5$ $8/12 = 2/3$
- Fila 10: $9/12 = 3/4$
- Fila 11: $10/12 = 5/6$
- Fila 12: l'11 tampoc té ni múltiples ni divisors en aquesta fila, no es pot simplificar res.

Cal dir que la taula ens servirà per veure quins nombres estaran a cadascuna de les seqüències de Farey des de F1 fins a F12. Utilitzarem un mètode per a calcular quines fraccions hem d'introduir a la següent seqüència, però sempre retornarem a la taula per a comprovar que les fraccions que hem introduït són correctes, i per veure que no ens hem deixat cap fracció. La taula queda de la següent manera:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{7}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{12}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{1}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$
$\frac{11}{1}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{11}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{12}{1}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{12}{12}$

Ara intentarem escriure les seqüències de Farey, començant per F1, per resoldre els tres primers apartats de l'activitat:

F1:

F1
$\frac{0}{1}$
$\frac{1}{1}$

0/1, 1/1

F2:

F1	F2
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$

0/1, 1/2, 1/1 A partir d'ara sempre hi haurà un nombre senars de fraccions, ja que a cada seqüència que

vingui, el que passa és que s'introdueix una fracció entre mig de 2 fraccions ja existents: En aquest cas, de F1 a F2, només hi ha 1 fracció més, entre les dues, i és $\frac{1}{2}$. A la seqüència següent, hi haurà una fracció entre $0/1$ i $\frac{1}{2}$ i una altra fracció entre $\frac{1}{2}$ i $1/1$:

F3:

F1	F2	F3
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$

$0/1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1/1$

F4:

F1	F2	F3	F4
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$

Observació: $\frac{3}{4}$ és més gran que $\frac{2}{3}$, perquè està per sota. Conforme anem baixant, els nombres són més grans. Més endavant no es veu tant clarament. La seqüència queda:

$0/1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1/1$

a) Escriviu F5:

F1	F2	F3	F4	F5
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$

0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1

Hem d'anar en compte, ja que 2/5 està entre 1/3 i 1/2, no ens sembla gaire intuïtiu... per tant s'ha de vigilar, no es pot fer un dibuix per a ordenar-los, que s'acompleixi sempre.... A partir d'ara, com que directament des de la taula no sembla fàcil ordenar-les correctament, utilitzarem F5 per a calcular les següents seqüències.

b) Usecu F5, per a completar F6 i F7:

Abans de tot, tenim clar que a F6 no hi pot haver nombres més grans que 6, només fins al 6.

Tot observant les seqüències prèvies, veiem que si sumem els dos numeradors d'una parella de fraccions, i els dos denominadors, però sumant-los tal qual, sense tenir en compte que són fraccions, sempre ens dóna la fracció del mig. Per tant... anem a veure:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0/1, & 1/5, & 1/4, & 1/3, & 2/5, & 1/2, & 3/5, & 2/3, & 3/4, & 4/5, & 1/1 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 1/6 & 2/9 & 2/7 & 3/8 & 3/7 & 4/7 & 5/8 & 5/7 & 7/9 & 5/6
 \end{array}$$

Els nombres que hem eliminat, els hem eliminat perquè a F6 no hi poden aparèixer fraccions que tinguin nombres més grans que 6 ni al numerador ni al denominador. Aleshores, veiem que a F6 hi ha dues fraccions que no apareixen a F5. Aquestes fraccions són 1/6 i 5/6. Si ho comparem amb la taula que hem fet abans, veiem que justament són aquestes dues fraccions les que han de sortir de més a F6:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$

Per a trobar F7, farem el mateix que hem fet per a trobar F6, però partint de F6:

$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$
 $\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$
 $\frac{1}{7} \quad \frac{2}{11} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{9}{11} \quad \frac{6}{7}$

Doncs ja tenim F7:

$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Retornem a la nostra taula, i notem que les fraccions que hem introduït són les fraccions que hi ha a la columna F7, pintades de groc:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{7}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$

d) Hi ha un munt de fraccions a F11 que no estan a F10. Només hi ha unes poques fraccions a F12, que no apareixen a F11. Pots explicar perquè això és així?

Això és cert, però passa el mateix amb F6 i F7, per exemple. Hi ha més fraccions a F11 i a F7 perquè són nombres primers, per tant, no tenen divisors entre ells i l'1. Com que són nombres primers, les fraccions que ens surten no es poden simplificar, per tant, les hem d'agafar. Amb F6, o amb F10 i F12, veiem que 6, 10 i 12 no són nombres primers. Això fa que les fraccions que ens surten es puguin simplificar, i podem eliminar-les. Tal i com hem fet al principi. Si ho mirem a la taula ho veiem clar:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{7}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{12}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{1}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$
$\frac{11}{1}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{11}$	$\frac{11}{12}$

A F11 Hi ha 10 fraccions que no es poden simplificar.

A F12 només hi ha 4 fraccions que no es poden simplificar.

e) En quins casos creus que necessitaràs un bon grapat de fraccions per aconseguir la propera seqüència?

Nosaltres diríem que necessitarem un bon grapat de nombres per a completar les seqüències de nombres primers, per exemple: F7, F11, F13, F17, F19, F23, etc. Com que són nombres primers, i no tenen cap divisor

entre ells i l'1, aleshores no podrem eliminar cap de les fraccions que ens sortiran a la seva columna, com passa amb F7, o amb F11.

**f) Sempre passarà que una seqüència Farey és més llarga que l'anterior?
Com ho saps?**

Sí, sempre passa. A cada seqüència que afegim, hi intervé un número més. Entre ells n^o primers, això vol dir que sempre tindrem fraccions que no es poden simplificar.

Per a que en una seqüència no hi haguem d'introduir cap nombre, i per tant quedés igual que l'anterior seqüència, hauríem de trobar un nombre que es pogués dividir per tots i cadascun dels nombres que té al davant. Això no és possible, ja que a cada seqüència hi introduïm un nombre més, i no hi ha cap nombre que sigui múltiple de tots els seus nombres anterior.

La única seqüència de Farey que hem trobat, que tingui un nombre parell de fraccions és F1.

A partir d'aquesta, totes les altres seran senars, ja que es van posant nombres al mig de parelles. A més a més, si agafem la fracció $1/2$, veiem que aquesta sempre queda al mig, lògicament, i els nombres que hi anem introduint, sempre són iguals en quantitat a ambdues parts de la seqüència. Si a la dreta n'hi afegim 1, a l'esquerra també. Això s'acompleix a totes les seqüències. Per tant, a banda de F1, que és la seqüència que estableix els límits, totes les següents tindran un nombre senar de fraccions.

g) En F4, $3/4$ es troba entre $2/3$ i $1/1$. Quan introduïm una nova fracció, què observes sobre les fraccions que aquesta té a cada costat?

És la suma directa dels números que hi ha al numerador, entre la suma directa dels números que hi ha al denominador.

h) Tria tres fraccions consecutives d'una seqüència qualsevol de Farey. Pots trobar una manera de combinar les dues fraccions exteriors per trobar la del mig?

Doncs fent el que hem dit a l'apartat g... sempre s'acompleix, encara que els números siguin grossos, ja que les fraccions resultants es poden simplificar. Ho veiem:

Hem triat, per exemplificar-ho, 3 nombres de F7, consecutius:

$$4/5, \quad 5/6, \quad 6/7$$

Combinant la primera i la última ens ha de sortir la del mig:

Sumem els numeradors de la primera i la última: $4 + 6 = 10$

Sumem els denominadors : $5 + 7 = 12$

Ens resulta la fracció $10/12$. Si ens hi fixem, $10/12$ es pot simplificar.

Dividim entre 2 el numerador i el denominador i justament trobem que $10/12 = 5/6$, que és la fracció que hi ha al mig.